

UMA TENTATIVA DE PROVAR A CONJECTURA DE CHRISTIAN GOLDBACH

AN ATTEMPT TO PROVE CHRISTIAN GOLDBACH'S CONJECTURE

Antonio Robson Barros¹

Resumo: O presente trabalho tem como propósito apresentar uma tentativa de demonstração da conjectura de Christian Goldbach(1690,1764) comentada nas páginas 8 a 12 .Portanto o referido tema contribui de maneira positiva no processo de ensino-aprendizagem e tem foco imprescindível na investigação.

Palavras-chave: Matemática. Conjectura. Paridade. Primo.

Abstract: The purpose of this work is to present an attempt to demonstrate Christian Goldbach's conjecture (1690, 1764) commented on on pages 8 to 12. Therefore, the aforementioned theme contributes positively to the teaching-learning process and has an essential focus on research.

Keywords: Mathematics. Conjecture. Parity. Prime

Introdução

Início este artigo com frases históricas e filosóficas ditas pelo príncipe da matemática Carl Friedrich Gauss (1777-1855) : A matemática é a rainha das ciências e a aritmética(teoria dos números)

¹ Mestre em matemática pela PROFMAT, Especialização em matemática e física e licenciatura plena em matemática pela UECE

é a rainha da matemática e pelo notável matemático Pitágoras (570 A.c,496 A.c): O número é o princípio de todas as coisas e governa todo o universo. E ainda complementou dizendo: Não há nada mais divino do que a verdade. Encontrar a verdade não é fácil, mas buscá-la é nobre. A matemática tem um papel importantíssimo na vida das pessoas e a construção do conhecimento de qualquer ente racional dá-se através da observação, do questionamento, da elaboração de hipóteses e de conclusões lógicas e rigorosas.

Aprender Matemática é mais do que manejar fórmulas, saber fazer contas ou marcar x nas respostas: é interpretar, criar significados, construir seus próprios instrumentos para resolver problemas, estar preparado para perceber esses mesmos problemas, desenvolver o raciocínio lógico, a capacidade de conceber, projetar e transcender o imediatamente sensível (Paraná, 1990, p. 66 apud PIOVESAN et al., 2008).

Neste trabalho faremos uma espécie de investigação onde estudaremos a conjectura de Goldbach com o fito principal de tentarmos demonstrá-la. A teoria dos números ou a aritmética é a base de nossa investigação e tentativa.

Investigar em Matemática assume características muito próprias, conduzindo rapidamente à formulação de conjecturas que se procuram testar e provar, se for o caso. As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura teste-demonstração. (PONTE, BROCARD e OLIVEIRA, 2006, p. 10)

O primeiro conjunto estudado em matemática é o conjunto dos números naturais, cujo símbolo é a letra N. Por uma questão de Didática vou considerar o zero (0) como natural, ou seja $N = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$. Dentro deste conjunto podemos destacar dois tipos de objetos ou elementos importantes. Os números divisíveis por 2 ou os que deixam resto zero ao dividi-los por 2 como é o caso do subconjunto $P = \{ 0, 2, 4, \dots, 2n, \dots \}$, ditos números pares e os números que quando divididos por 2 deixam resto igual a 1, ditos números ímpares, ou seja, o subconjunto $I = \{ 1, 3, 5, \dots, 2n+1, \dots \}$. Seguem as definições de número par e de número ímpar:

Definição 1. Na divisão de um inteiro qualquer a por $b \neq 0$ os possíveis restos são $r = 0$ ou $r = 1$. Se $r = 0$, então o inteiro $a = 2q$ e é denominado par; e se $r = 1$, então o inteiro $a = 2q + 1$ e é denominado ímpar. Considera-se q como um número inteiro, $q \in \mathbb{Z}$.

Dentro da infinidade dos números naturais destacam-se duas outras categorias ou famílias de números que chamamos de compostos ou primos. As definições desses entes numéricos dependem da noção ou definição de ser divisível:

Definição 2: Sejam a e b dois números inteiros, com $a \neq 0$. Diz-se que a divide b se e somente se existe um inteiro q tal que $b = aq$.

Se a divide b também se diz que a é um divisor de b , que b é um múltiplo de a , que a é um fator de b ou que b é divisível por a .

Com a notação " $a|b$ " "indica-se que $a \neq 0$ divide b e, portanto, a notação " $a \nmid b$ " significa que $a \neq 0$ não divide b .

A relação " a divide b " conjunto dos números inteiros ($a|b$). Denomina-se relação de divisibilidade em \mathbb{Z} .

Note que se a é um divisor de b , então $-a$ também é um divisor de b , pois a igualdade $b=aq$ implica em $b = (-a) \times (-q)$, de forma que os divisores de um inteiro qualquer são dois a dois iguais em valor absoluto e de sinais opostos.

Em particular:

$2|8$, porque $8=2 \cdot 4$

$-5|30$, porque $30=(-5)(-6)$

$7 \nmid -21$, porque $(-21) \neq 7x(-3)$

$5 \nmid 13$, porque não existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $13 = 5q$

Definição 3: Diz-se que um inteiro positivo $p > 1$ é um número primo ou apenas um primo se e somente se 1 e p são os seus únicos divisores. Um inteiro positivo maior que 1 que não é primo diz-se composto. Em particular os inteiros positivos 2,3,5 e 7 são todos primos e os inteiros positivos



4,6,8 e 10 são todos compostos inteiro positivo 1 não é nem primo e nem composto, e por conseguinte se a é um inteiro positivo qualquer, então a é primo, ou a é composto ou a é igual a 1 ($a = 1$).

Teorema 1

Se um primo p não divide um inteiro a , então a e p são primos entre si.

Prova:

Seja d o mdc entre a e p $(a,p) = d$. Então $d|a$ e $d|p$. Da relação $d|p$, resulta que $d=1$ ou $d = p$, porque p é primo por hipótese, e como a segunda igualdade é impossível, porque p não divide a , segue-se que $d=1$ ou seja, o m.d.c. entre a e p é igual a 1, $(a,p) = \text{m.d.c.}(a,p) = 1$. Logo a e p são primos entre si.

Teorema 2

Todo inteiro composto possui um divisor primo.

Prova:

Seja a um inteiro composto. Consideremos o conjunto A de todos os divisores positivos de a , exceto os divisores triviais 1 e a , isto é:

$$A = \{x|a, 1 < x < a\}$$

Pelo princípio da boa ordenação existe o elemento mínimo p de A , que devo mostrar que é primo. Com efeito, se p fosse composto admitiria pelo menos um divisor d tal que $1 < d < p$ e então $d|p$ e $p|a$, o que implica em, isto é, p não seria o elemento mínimo de A . Logo, p é primo.

Teorema 3

Teorema fundamental da Aritmética(TFA).

Todo inteiro positivo $n > 1$ é igual a um produto de fatores primos.



Prova

Com efeito, se n é primo, nada há que demonstrar, e se n é composto, então, pelo teorema 2, possui um divisor primo, p_1 , e temos:

$$n = p_1 \eta, 1 < \eta < n$$

Se η é primo, então essa igualdade representa n como um produto de fatores primos, e se, ao invés, η é composto, então pelo teorema 2, possui um divisor primo digamos p_2 , isto é, $\eta = p_2 \eta_2$ e temos: $n = p_1 p_2 \eta_2$, $1 < \eta_2 < \eta$

Sem muitos comentários lógicos, e assim por diante. Assim sendo, temos a sequência decrescente:

$$\eta > \eta_1 > \eta_2 > \dots > 1$$

E como só existe um número finito de inteiros positivos menores que n e maiores que 1, existe necessariamente um η_k que é um primo p_k ($\eta_k = p_k$) e por conseguinte teremos: $n = p_1 p_2 \dots p_k$. E esta igualdade representa o inteiro positivo $n > 1$ como produto de fatores primos. (c.q.d)

Teorema 4 (de Euclides)

Há um número infinito de primos.

Demonstração:

Suponhamos, por absurdo, que a sequência dos números primos, seja finita, isto é, que só existam os primos $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ..., $p_n = k$. Considere o número $C = p_1 \times p_2 \times p_3 \dots p_n + 1$ ou $C - (p_1 \times p_2 \times p_3 \dots p_n) = 1$.

Note que C é maior que 1, $C > 1$. Logo pelo Teorema Fundamental da aritmética -TFA existe algum p_i com i natural maior que zero, tal que p_i divide C , $p_i | C$

Assim $p_i | C$ e $p_i | C - (P_1 \times p_2 \times p_3 \dots p_n) = 1$, já que p_i é um dos primos da relação finita assumida por hipótese.

E concluir que $p_i | 1$ é afirmar que $p_i = 1$. O que nos leva a um absurdo pois 1 não é um número primo. Portanto existe uma quantidade infinita de primos (c.q.d)

O que é uma conjectura?

O dicionário da língua portuguesa traz alguns significados desta palavra tais como:

- Opinião que resulta de palpites ou inferências; suposição.
- Ação ou efeito de deduzir ou de fazer inferências, baseando-se em palpites, intuições, provas inconclusas ou suposições.
- Hipótese admitida como verdadeira sem que haja comprovação formal.

O que seria uma conjectura do ponto de vista lógico matemático? Apolinar (2011, p. 22) em seu Dicionário de Matemática nos diz que uma conjectura seria uma afirmação, ou um conjunto de afirmações, referente a um resultado científico, mas que se segue sem oferecer evidência suficiente capaz de demonstrá-la ou refutá-la. Já para Praciano-Pereira (2013) defende que uma conjectura é uma afirmação hipotética que se considera verdadeira, mas da qual não se conseguiu ainda estabelecer um regime de provas. O estudioso relata que haveria conjecturas decisivas para a matemática nos últimos 20 anos, sendo que duas foram provadas: “o último teorema de Fermat, por Wiles e outros, e a conjectura de Poincaré, por Perelman. Um pouco antes, na década de 60 foi encerrada a discussão sobre a conjectura de Cantor sobre a cardinalidade” (p. 24).

:



CONJECTURA DE GOLDBACH:

Todo número par maior que 2 pode ser obtido pela soma de dois números primos. A nossa tentativa de demonstração da conjectura de Goldbach consiste em exprimir cada número composto c como a soma de um mesmo número primo p , ou seja, dado p primo, o composto c será escrito como sendo $c = p + p$ ou $c = 2p$. E ainda tentaremos utilizar o número primo p apenas uma vez em cada soma, gerando assim novos números primos dentro dos infinitos que já provamos existir.

Os elementos a serem investigados pertencem ao conjunto $P = \{ 4, 6, 8, 10, \dots \}$, o que acarreta em uma progressão aritmética de primeiro termo $c_1 = 4$ e de razão $r = 2$ cujo termo geral é dado por $C_n = 4 + (n-1) \times 2$ ou $C_n = 2n + 2$, para n natural a partir de 1. O que nos leva a concluir que dado um número composto C_n , o próximo composto ou o seu sucessor é dado por $C_{(n+1)} = C_{n+2}$.

Vejamos a composição de cada número composto em pelo menos uma soma de primos:

$$C_1 = 4 = 2 + 2, p_1 = 2$$

$$C_2 = C_1 + 2 = (2+2) + 2 = (2+2) + 1 + 1 = (2+1) + (2+1) = 3+3 = 6, p_2 = 3$$

$$C_3 = C_2 + 2 = 6+2 = (3+3) + 2 = 3 + (3+2) = 3+5 = 8 \neq 5 + 5, p_3 = 5.$$

Note que até aqui utilizamos apenas os primos 2, 3 e 5.

$$C_4 = C_3 + 2 = 8+2 = 6+2+2 = 3+3+4 = 3+3+4 = 3+7 = 10, 5 + 5 \neq 7 + 7, p_4 = 7$$

$$C_5 = C_4 + 2 = 10+2 = (3+7)+2 = 3+(2+7) = (3+2)+7 = 5+7 = 12 \neq 11 + 11$$

$$C_6 = C_5 + 2 = 12+2 = 5+7+2 = 5+5+2+2 = 5+5+1+1+2 = (5+5+1) + (1+2) = 11+3 = 3+11 = 7+7 \neq 13+13, p_5 = 11$$

Observe que para escrever o próximo número composto $C_7 = C_6 + 2$ vou tentar utilizar a soma $17 + 17$ já que eu utilizei $13+13$ na formação do composto C_6 , logo: $C_7 = 2.7+2 = 16, C_7 = 16 = 14+2 = 3+11+2 = 3+(11+2) = 3+13, p_6 = 13$.

$$C_8 = 2.8+2 = 18 = (3+13)+2 = (3+2)+(2+11) = (3+2+2)+11 = 7+11 \neq 17+17$$

Escrevendo o composto de ordem nove, $C_9 = 2.9+2 = 18+2 = 20$. Agora tento utilizar a soma $19+19$ e trabalhar da mesma forma que fiz nos números compostos já escritos.

$$C_9 = 2.9+2 = 18+2 = 20 = 7+11+2 = (3+4)+11+2 = 3+(4+11+2) = 3+17 \neq 19+19, p_7 = 17$$

O que podemos observar é que utilizamos e sempre no início as infinitas somas do tipo $p+p$: $2+2, 3+3, 5+5, 7+7, 11+11, 13+13, 17+17, \dots$ tendo em vista que existe uma infinidade de primos. Em muitos casos a própria soma inicial já resulta em dois primos com a igualdade verificada, como é o caso dos números

$C_1 = 4 = 2 + 2$, $p_1 = 2$, $c_2 = 6 = 3 + 3$, $c_4 = 10 = 5 + 5$ e em outros casos a soma deve ser corrigida ou alterada para que tenhamos a soma de dois primos como mostram os números $c_3 = 8 \neq 5 + 5$, mas $8 = 5 + 5 - 2 = 5 - 2 + 5 = 3 + 5$, $p_3 = 5$ é primo, $c_5 = 12 \neq 7 + 7$, mas $12 = 7+7 - 2 = 7 - 2 + 7 = 5 + 7$, $p_4 = 7$ é primo, $c_6 = 14 \neq 11 + 11$, mas $14 = 11 + 11 - 2^3 = (11 - 8) + 11 = 3 + 11$, $p_5 = 11$ é primo.

Perceba também que para escrever o composto $c_1 = 4$ utilizei o par de primos $(2,2)$, para escrever o composto $c_2 = 6$ utilizei o par de primos $(3,3)$, para escrever o composto $c_3 = 8$ utilizei o par de primos $(5,5)$ e assim sempre utilizo nestes casos um novo par de primos. Algo possível dentro da infinidade deste conjunto.

Concluo que para cada par (x,y) de primos existe um correspondente c , um número composto, isto é, para cada composto posso exibir uma soma de dois números primos idênticos cuja igualdade é verificada inicialmente ou é confirmada após a utilização de acertos aritméticos.

Em síntese percebe-se que utilizamos as somas $2+2, 3+3, 5+5, \dots, p+p$ com p primo não utilizado em um determinado momento. Quando a soma $p+p$ gera o composto c_i , para i natural maior que 1, e por sorte a igualdade já está verificada, então nada mais a fazer. Entretanto quando a soma $p + p \neq c_k$, desenvolvemos esta soma de modo que a igualdade seja verificada e que em muitos casos gere um novo p .

As somas de primos utilizadas gerando números compostos maiores ou iguais a 4:

$$4=2+2 \text{ ,}$$

$$6=3+3,$$

$$8=3+5$$

$$10=5+5$$

$$12=5+7$$

$$14=7+7=3+11$$

$$16=3+13$$

$$18= 5+13$$

$$20=3+17$$

$$22=5+17$$

.....

.....

$$C_{k-1} = p_i + P_{k-1}$$

$$C_k = p_j + p_k$$

Portanto dentro da infinidade dos números primos e dos naturais sempre exibimos um genérico número composto como a soma de dois números primos iguais ou diferentes. E deste modo atingimos o nosso objetivo de tentar provar a conjectura de GOLDBACH.

REFERENCIAS

Alencar Filho, Edgard de. Teoria Elementar dos Números. 14. ed. São Paulo: Nobel, 1987.

Portal do Impa. Disponível em <https://impa.br/noticias/problemas-do-milenio-da-geometria->

Portal da matemática. Disponível em: <http://www.matematica.br/historia/nperfeitos.html>. Acesso em 21 de abril de 2019.

Portal da ufc. Disponível em: <http://www.periodicos.ufc.br/eu/article/view/15284/15570> Acesso em 22 de abril de 2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM PSICOLOGIA DOUTORADO EM PSICOLOGIA Linha de pesquisa “Estudos Psicanalíticos – Conceitos Fundamentais em Psicanálise e Investigações no Campo Clínico e Cultura”

MARDEM LEANDRO SILVA A CONJECTURA LÓGICA DE JACQUES LACAN: Belo Horizonte 2019

