DESCARTES E O BELO NA MATEMÁTICA[1]

DESCARTES AND THE BEAUTY IN MATHEMATICS

Raquel Anna Sapunaru[2]

Bruna Fernandes Barbosa[3]

Resumo: A história da Matemática demonstra que sua fundação, bem como seu desenvolvimento, se deram lentamente, no início sem muito rigor, mas sempre com criatividade. O método axiomático: teoremas, proposições e conceitos racionais, logicamente dispostos, foram os maiores êxitos alcançados por essa ciência. Contudo, a Matemática se caracteriza também por uma elegância singular, nem sempre óbvia e pouco explorada. Ponderando que ela é uma das bases do desenvolvimento científico e faz parte da estrutura histórica e cultural da sociedade, é mister um maior aprofundamento dessa característica. Nesse contexto, para comprovar a existência dessa elegância, ou melhor, do belo na Matemática, recorre-se aos trabalhos de filósofos e matemáticos que se destacaram ao longo da elaboração dessa ciência. O foco concentra-se na obra A Geometria de Descartes, composta de três partes. Em uma delas o filósofo afirma que um determina-

1 Maryam Mirzakhani, professora da Universidade Stanford, nascida no Irã em 1977 foi a primeira mulher a ganhar a medalha Fields, distinção mais prestigiosa da Matemática. Infelizmente, faleceu este ano. Esse artigo é em homenagem a ela

2 UFVJM-ICT-BC&T

3 UFVJM-ICT-BC&T

do teorema é muito belo. Assim, o ponto de partida, será explorar o conceito de beleza em Platão, rumo ao belo na Matemática.

Palavras-chave: Matemática; Beleza; Descartes.

Abstract: The history of mathematics shows that its foundation, as well as its development, were given slowly, at first without much rigor, but always with creativity. The axiomatic method, theorems, propositions and rational concepts, logically arranged, were the greatest successes achieved by this science. However, mathematics is also characterized by a singular elegance, not always obvious and little explored. Considering that it is one of the bases of scientific spread and it is part of the historical and cultural structure of society, it is necessary to further deepen this characteristic. In this context, in order to prove the existence of this elegance, or rather, of the beautiful in mathematics, is used the works of philosophers and mathematicians who stood out during the elaboration of this science. The focus is on Descartes' work The Geometry, composed of three parts. In one of them the philosopher affirms that a certain theorem is very beautiful. Thus, the starting point will be to explore the concept of beauty in Plato, towards the beautiful in mathematics.

Keywords: Mathematic; Beauty; Descartes.

INTRODUÇÃO

Segundo Luis Antônio Benedetti (2007), a Matemática é caracterizada como a ciência que estuda as propriedades dos números, das figuras geométricas e das funções. Ela surgiu com o intuito de facilitar a vida dos homens e organizar a sociedade. Desde então, essa tem sido sua função, pelo menos no que tange sua vertente pragmática. Assim, os egípcios a utilizaram na demarcação de suas terras, em construções de pirâmides e na astronomia. Do mesmo modo, os gregos também usufruíram da Matemática, mas como base de pensamentos filosóficos e na criação de novas realidades matemáticas.

Não obstante, independentemente do período histórico analisado percebe-se a presença da Matemática como um princípio cultural. A história da Matemática demonstra que sua fundação, bem como seu desenvolvimento se deram lentamente, inicialmente sem muito rigor, mas sempre com criatividade. O método axiomático, teoremas, proposições e conceitos racionais, logicamente dispostos foram os maiores êxitos alcançados pela ciência. Contudo, a Matemática se caracteriza também por uma elegância singular, nem sempre óbvia.

Nesse contexto, é possível se deparar com o belo na Matemática onde quer que se procure e o melhor de tudo encontra-se no fato de haver ainda muito onde buscar, pois a Matemática não para de se desenvolver.

É possível comprovar a formosura da Matemática de vários ângulos. Um exemplo, seria a harmonia complexa mantida entre a aritmética, a análise, a álgebra e a geometria áreas estas que se completam. Outro exemplo poderia ser o primor oculto dos teoremas, tão graciosos a ponto de suas aplicações serem colocadas de lado em detrimento de tamanha elegância. Ressalta-

-se que não há obstáculos para que um objeto matemático seja concomitantemente exato e belo. Até pouco tempo, o belo na Matemática encontrava-se associado à racionalidade. Atualmente, a austeridade e a trivialidade com que se resolve uma equação, também fazem parte do belo nessa ciência.

Efetivamente, muito se sabe sobre teorias e aplicações matemáticas, mas os estudos sobre o belo na Matemática são mais escassos. Ponderando que a Matemática é um dos fundamentos do desenvolvimento científico da humanidade e faz parte da estrutura do desenvolvimento histórico e cultural da sociedade, é mister um maior aprofundamento desse assunto.

Inicialmente, pode-se recorrer aos trabalhos dos filósofos e matemáticos que se revelaram no processo do desenvolvimento da Matemática como, Eudoxo, Platão, Descartes, Gauss, Hilbert, Poincaré, entre tantos outros. Destaca-se aqui Platão e Descartes.

Posto isto, este artigo é objeto de um breve estudo que se propôs a discutir alguns aspectos do conceito de beleza na Matemática, utilizando como exemplo um teorema de Descartes. Assim, foi realizado um procedimento reflexivo e sistemático, no qual os dados foram obtidos por documentação indireta, isto é, pesquisa de uma bibliografia já existente, já que busca explicar um conceito de base teórica publicado em um livro. Trata-se, então, de um artigo de compilação.

PLATÃO E A BELEZA MATEMÁTICA

Falar do belo na antiguidade é bem diferente de falar sobre ele nos dias de hoje. Por quê? Lúcia de Fátima do Vale explica essa diferença ao afirmar que "Para Platão, o belo é o bem, a verdade, a perfeição; existe em si mesma, apartada do mundo sensível, residindo, portanto, no mundo das ideias. A ideia suprema da beleza pode determinar o que seja mais ou menos belo." (2005, p.1).

Especificamente, sobre a beleza matemática, o matemático Étienne Ghys (2015), em palestra proferida na Academia Brasileira de Ciências, diz que a estética tem um destaque especial na Filosofia clássica e nesse quesito a maioria dos matemáticos ficam com a teoria filosófica do realismo estético de Platão. Essa corrente filosófica, diretamente ligada à estética representa um patamar matemático, impalpável, tomado por elementos matemáticos, como os números primos, por exemplo, mas que não foge à realidade. Nesse contexto, os matemáticos são meros espectadores e a beleza é uma virtude relativa a esses objetos. Presentemente, a isso dá-se o nome de platonismo matemático.

Em linhas gerais, o platonismo matemático imprime á Matemática uma certa independência, pois ela encontra-se no mundo das ideias de Platão (EVES, 2004). Observa-se que Descartes, assim como Leibniz, Newton e muitos outros matemáticos do século XVII abraçaram essa ideia. Uma definição mais precisa dessa corrente de pensamento encontra-se no artigo "O platonismo de Russell na metafísica e na matemática" de Guido Imaguire. Segundo o autor:

> A expressão "platonismo matemático" foi cunhada por Paul Bernays no seu ar-

ISSN: 2675-469X
Vol. 03 - n 02 - ano 2022
Editora Acadêmica Periodicojs

tigo de 1935, "Sur le platonisme dans les mathématiques". Além de afirmar a existência de entidades abstratas da matemática, como os números, conjuntos e funções, o platonismo matemático caracteriza-se pela tese de que verdades matemáticas são descobertas e não criadas por meio das provas que as demonstram. Por isso, proposições matemáticas não demonstradas, como, por exemplo, a suposição de Goldbach, são consideradas portadoras de um valor de verdade definitiva […] (IMAGUIRE, 2005, p.14).

Contrariamente ao platonismo, vê-se o formalismo de Hilbert e o construtivismo de Brower, ambas do século XX. Hilbert trabalhou com a ideia de que não existem objetos matemáticos, como, por exemplo, números, estruturas, conjuntos, entre outros. Desse modo, a matemática consiste de axiomas, definições e teoremas. Por sua vez, para Brower a matemática pode ser entendida como construção mental e não como um conjunto de teoremas como no logicismo. (EVES, 2004). Segundo o verbete "logicisto" do Dicionário de Filosofia de Abbagnano:

> Com este nome costuma-se designar uma corrente de pensamento lógico-matemático que floresceu no fim do século XIX e no início do século XX [...] Os pensadores dessa corrente sustentam que a matemática (pura) é um ramo da lógica, ou seja, que todas as proposições das matemáticas puras (particularmente da aritmética, portan-

ISSN: 2675-469X
Vol. 03 - n 02 - ano 2022
Editora Acadêmica Periodicojs

> to da análise) só podem ser enunciadas com o vocabulário e a sintaxe da lógica matemática, que assim se torna a disciplina matemática por excelência [...] Ao L. [logicismo] opõe-se o formalismo e o intuicionismo. (2003, p.630).

Na relação entre Platão e a beleza matemática, destaca--se um de seus famosos diálogos, intitulado Hípias Maior. Nele, Sócrates e o seu interlocutor, um sofista chamado Hípias, discutem sobre o conceito de beleza. Sócrates no meio do diálogo define a beleza como sendo uma forma de verdade, do desenvolvimento entre o harmonioso e o útil. Na sequência, ele argumenta que a beleza está relacionada com o prazer, melhor dizendo, com o prazer de ver e ouvir. Por fim, Sócrates deixa a questão em aberto, pois, afinal, o papel da Filosofia é o de discutir e não concluir.

Para Benedetti (2007), Platão tornou a ideia da beleza clara quando uniu a verdade, o bem e o belo, de onde nasce a estrada através da qual a ciência e a arte passam a trilhar juntas. Certamente, na Grécia antiga, nem todos pensavam igualmente.

Atualmente, os matemáticos se apoiam na definição da beleza conforme descrita por Platão, "[...] que ela correlaciona o harmonioso e o útil dentro de um mundo objetivo e real, que não necessariamente é o nosso mundo físico." (GHYS, 2015, p.4). Ainda sobre a definição da beleza matemática, encontra-se Bertrand Russell conjecturando que "A matemática, quando vista da maneira certa, tem em si não só a verdade, mas uma beleza suprema - uma beleza fria e austera, que não possui os lindos enfeites da pintura ou da música." (RUSSELL apud GHYS, 2015, p.4).

HÍPIAS MAIOR

Hípias Maior, como apontado anteriormente por Ghys, é um dos textos platônicos que trata da estética. Nesse diálogo, a natureza do belo ou o fundamento do belo é questionada por Sócrates.

Grosso modo, ele introduz o ponto ápice do diálogo ao questionar Hípias sobre o belo. Uma "bela jovem" é a primeira resposta dada por Hípias que erroneamente caracteriza o belo pela aparência e não por sua natureza. Diante disso, Sócrates refuta o argumento de Hípias, expressando sua desconfiança perante à beleza transitória das mulheres.

A segunda resposta dada por Hípias, caracteriza o belo como sendo a beleza da riqueza, comparando o belo com o ouro. Sócrates, então, anula a generalidade do ouro, retratando a beleza de outros materiais, como o marfim e o mármore. Dessa forma, Sócrates exclui a possibilidade da beleza enquanto matéria ou bens materiais.

Finalmente, Hípias chega ao máximo das abstrações dizendo que a beleza se associa a vida humana feliz composta por uma diversidade de coisas belas particulares. Assim, após a definição da teoria da exemplaridade descrita através das respostas de Hípias, Sócrates inicia suas conclusões tomando um apanhado geral do que foi anteriormente dialogado. Os argumentos conclusivos de Sócrates começam tratando das exterioridades e seguem para as utilidades. Para o filósofo, quanto mais define-se o belo pelas aparências ou pelo útil, mais distantes dele se está.

É valido lembrar que nessa época era impossível dizer que algo fosse belo sem que fosse bom ou verdadeiro. Nesse caso, o belo, o bem e o verdadeiro existiam concomitantemente, sem oposição. Então, Sócrates finaliza sugerindo que o belo seria o prazer da visão e da audição, mas logo refuta essa ideia, trazendo à tona os prazeres proporcionados pelos outros sentidos, olfato, tato e paladar, bem como a existência da beleza sem prazer sensível, não chegando a nenhuma conclusão sobre o que seria o belo. (HÍPIAS MAIOR, 286c-294c).

“ESSE É UM TEOREMA MUITO BELO.” (DESCARTES)

Em A Geometria, Descartes elogia explicitamente um teorema em particular, contemplando-o: “Esse é um teorema muito belo.” (DESCARTES, 2015, p.54). Os motivos pelos quais adjetiva-se um teorema de belo já foram aqui elencados anteriormente. A título de ilustração, uma das novidades que A Geometria trouxe para a Filosofia do século XVII foi a língua na qual essa obra foi escrita. Desde a Idade Média os textos científicos e filosóficos eram escritos em latim. Ao escrever A Geometria em francês, o filósofo afirmou seu espírito moderno, enaltecedor de sua própria cultura.

O teorema que irá ser tratado tem algo de especial, a saber:

ISSN: 2675-469X

Vol. 03 - n 02 - ano 2022

Editora Acadêmica Periodicojs

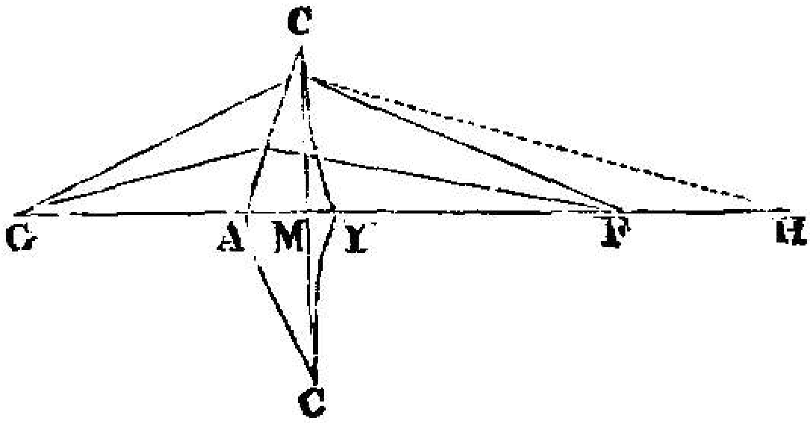

Figura 1: Lente ACY
Fonte: DESCARTES, 2015, p.53

Na Figura 1, sejam os pontos G, C, F e a proporção AM/YM dados. Faltando encontrar a forma da lente ACY, que recebe todos os raios que vêm a partir do ponto G e fazendo-os convergirem para F, segue-se:

1º passo: utilizam-se as ovais AC e CY que possuem os seguintes pares de focos que podem ser observadas nas respectivas figuras:

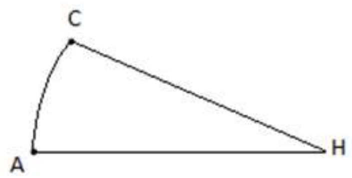

Figura 2: oval AC{Foco G, Foco H}

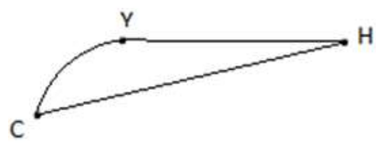

Figura 3: oval CY{Foco F, Foco H}

Para encontrar essas ovais, supõe-se H conhecido, pois ele está presente em ambas, como mostrado nas Figuras 2 e 3.

2º passo: procura-se AM para os pontos G, C, H e através da interpretação gráfica, faz-se:

$$k = CH - HM (1)$$
$$g = GC - GM (2)$$

Vale ressaltar que Descartes entendia por oval o que se entende hoje por lente e que gênero equivalia ao grau da equação. Então, quando ao se referir à uma oval do 1º gênero, por exemplo, ele estava se referindo à uma lente cuja equação que a descrevia era do primeiro grau.

Agora, sabendo que AC é a primeira parte da oval do 1º gênero, chega-se a seguinte análise: Considerando GC >> GA de tal forma que o comprimento HA ultrapasse o comprimento HC, ou seja, fique maior, então teremos a seguinte proporção:

$$d/e = HA/HC (3)$$

Considera-se agora que AM seja um referencial que possui o seguinte valor:

$$AM = x (4)$$

Então, ao fazer a diferença entre a equação 4 e a equação 1, representa-se a diferença entre os comprimentos AH e CH.

$$x - k = AH - CH (5)$$

Seguindo o raciocínio anterior, ao somar a equação 2 e a equação 4, representa-se a diferença dos comprimentos GC e GA.

$$x + g = GC - GA (6)$$

Por fim, uma vez que a equação 6 está para a equação 5, assim como d está para e, obtem-se:

ISSN: 2675-469X

Vol. 03 - n 02 - ano 2022

Editora Acadêmica Periodicojs

$$(g + x\ /(x - k \ = d\ e$$
$$g\ e + x\ e = d\ x - d\ k$$
$$g\ e + d\ k = d\ x - x\ e$$
$$g\ e + d\ k = x\ d\ - e$$
$$x = (g\ e - d\ k\ /(d\ - e \quad (7)$$

É válido lembrar que x = AM, então sendo AC a primeira parte da oval do primeiro gênero, tem-se a seguinte igualdade:

$$\frac{(ge+dk)/(d\text{-}e)}{AM} = 1$$

3º passo: deseja-se encontrar MY, que passa pelos pontos F, C e H, de modo que CY seja a primeira parte de uma oval do 3º gênero. Para tal, as seguintes atribuições de variáveis são feitas:

$$y = MY \ (8)$$
$$f = CF – FM \ (9)$$

Onde toma-se MY como referencial e a soma das equações 8 e 9 representam uma linha que se encontra entre CF e FY. Em seguida, sabendo a representação da equação 1 e que a diferença entre CH e HY é dada pela soma das equações 1 e 8, tem-se:

$$y + k = CH – HY \ (10)$$

Por fim, como a soma das equações 8 e 9 está para a linha encontrada na equação 10, assim, como d está para e, tem-se:

$$(f+y)/(y+k)=d/e$$
$$fe + ye = dy + dk$$
$$fe – dk = dy – ye$$

$$fe - dk = y(d - e)$$

$$y = (fe - dk)/(d - e) \quad (11)$$

Devido à oval do 3º gênero, encontra-se que y ou MY é representado pela equação 11.

4º passo: ignorando-se conjuntamente as duas quantidades encontradas para AM e MY, encontra-se um valor para a linha inteira AY. Para isso, sabe-se que a soma das equações 2 e 9 devem estar para a proporção entre o ponto e e a diferença de duas linhas que servem para medir as refrações da lente proposta (d – e), onde e é a menor das linhas.

$$g + f = (d-e)/e$$

$$ge + fe = d - e$$

$$(ge + fe)/(d - e) = AY \quad (12)$$

Logo, AY = (ge + fe)/(d – e) onde "[...] esse é um teorema muito belo." (DESCARTES, 2015, p.54).

OUTRAS VISÕES DA BELEZA MATEMÁTICA

Cabe aqui mostrar também algumas ideias contemporâneas sobre a beleza na Matemática. Pode de início parecer que essas ideias nada têm a ver com as visões antiga e renascentista de Platão e Descartes. Porém, lançando-se um olhar mais cuidadoso sobre este assunto, percebe-se que não é bem assim.

Douglas R. Hofstadter, em seu livro Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid, de 1999, faz um breve questionamento sobre o que é a beleza no melhor estilo socrático. Ele afirma que: "[...] não é uma propriedade sintática." (1999, p.583) e questiona se seria uma propriedade semântica ou artística. Seus questionamentos continuam e, na

ISSN: 2675-469X
Vol. 03 - n 02 - ano 2022
Editora Acadêmica Periodicojs

sequência, Hofstadter envolve o tempo. Ele indaga se a mudança de gosto se dá devido a essa variável e exemplifica:

> Vamos, nesse momento, considerar uma única perspectiva (ou um único espectador). Todos tiveram a experiência de achar algo bonito em um momento, maçante em outro - e provavelmente intermediário em outras circunstâncias. Então, a beleza é um atributo que varia no tempo? Pode-se mudar o curso das coisas e dizer que é o espectador que variou no tempo. Dado um espectador particular de uma pintura particular em determinado momento, é razoável afirmar que a beleza é uma qualidade que está definitivamente presente ou ausente? Ou ainda há algo mal definido e intangível sobre isso? (HOFSTADTER, 1999, p.583).

Assim sendo, como Kant, Hofstadter parece concluir que o juízo de gosto leva a indeterminação e isso parece valer também para a beleza na Matemática.

Já Terence Tao, em seu artigo "What is good mathematics?", de 2007, discorre sobre o que seria uma boa matemática de maneira formal e destaca a importância do matemático de se preocupar com essa beleza, tornando-a mais expressiva. Para tal, o autor enumera vinte regras, no mínimo, entre as quais destacam-se:

> (iv) Boa visão matemática (por exemplo, uma grande simplificação conceitual ou a realização de um princípio unificador,

heurística, analogia ou tema) [...]
(xiii) Bela matemática (por exemplo, as incríveis identidades de Ramanujan, resultados que são fáceis (e bonitos) para indicar, mas não para provar) [...]
(xiv) Matemática elegante (por exemplo, o conceito de "provas do livro" de
(xv) Paul Erdós, alcançando um resultado difícil com um mínimo de esforço);
(xvi) Matemática criativa (por exemplo, técnica, ponto de vista ou espécie de resultado radicalmente novo e original);
(xvii) Matemática útil (por exemplo, um lema ou método que será usado repetidamente no trabalho futuro sobre o assunto);
(xviii) Matemática forte (por exemplo, um resultado acentuado que corresponde aos contraexemplos conhecidos, ou um resultado que deduz uma conclusão inesperadamente forte de uma hipótese aparentemente fraca);
(xix) Matemática profunda (por exemplo, um resultado que é obviamente não trivial, por exemplo, capturando um fenômeno sutil além do alcance de ferramentas mais elementares);
(xx) Matemática intuitiva (por exemplo, um argumento natural e facilmente visualizável);

CONCLUSÃO

Corroborando a ideia de Ghys (2015), para o senso comum parece contraditório falar de beleza matemática, pois, geralmente, a ideia é que a Matemática irá trazer somente aquelas fórmulas feias e complicadas, à memória delas. Por certo é que, a imagem pública de um matemático nem se compara à positividade impressa pela imagem de um artista. O matemático normalmente é descrito como um ser frio e calculista, para não dizer um robô.

Apesar disso, entre os matemáticos, existe um conceito estético que eles não se esquecem quando descrevem um teorema complexo, uma prova requintada, entre outras belas expressões matemáticas. Além disso, sabe-se que o material de trabalho de um matemático são suas ideias. Por esse motivo, a arte de um matemático pode ser tão bela quanto a de um pintor ou de um escritor. Para tal, as ideias do matemático, sobre as quais sua arte se apoia, devem se entrelaçar com harmonia e sintonia, assim como as cores e palavras dos demais tipos de artistas. Sem esses fatores, sem essa beleza, a Matemática não pode persistir.

De acordo com Hardy (2000), é fato que o conceito de beleza é relativo, ou pelo menos, difícil de definir em qualquer contexto. Entretanto, não é necessário ser um expert em literatura para reconhecer um bom romance quando o lemos. O mesmo ocorre para a beleza matemática. Qualquer indivíduo, com certa instrução, provavelmente ficará encantado com a formosura da arte matemática. Nas palavras do professor Hogben, "Há, com certeza, indivíduos para quem a Matemática exerce uma atração friamente impessoal… o apelo estético da Matemática de fato existe para uns poucos escolhidos" (HOGBEN apud HARDY, 2000, p.81). Com essa afirmação, o professor reconhece a importância da estética da Matemática,

ISSN: 2675-469X
Vol. 03 - n 02- ano 2022
Editora Acadêmica Periodicojs

apesar de buscar minimizá-la.

Indo ainda mais longe, não é nada absurdo supor que a Matemática é um objeto de interesse para uma fração da população bem maior do que os que se interessam pela música, apesar de que, intuitivamente, isso não pareça ser verdade. A justificativa é que a maioria das pessoas afirmam, de forma exagerada, não terem conhecimento matemático e isso as deixa atentas quando essa matéria é mencionada. Da mesma forma, a grande maioria das pessoas também consegue apreciar uma boa melodia, já que a música consegue incitar as emoções das massas. Assim sendo, não ser um especialista no ramo musical é considerado uma pequena imperfeição, que não incomoda tanto, mas quando falamos da Matemática, a coisa parece ser diferente.

Nesse contexto, surge a beleza do teorema de Descartes. Ao demonstrar o teorema para uma determinada lente, Descartes aplica o seguinte método: divide esta lente em duas ovais e chega a uma relação na qual mostra que o foco dessa lente se equivale a uma unidade. Para tal, ele faz uso de relações trigonométricas simples e utiliza o mesmo método para essas duas ovais. É aí que está a beleza do teorema, visto que o filósofo demonstra que independentemente da forma, da curvatura ou do grau da equação que descreva essa lente sempre haverá uma relação que será equivalente a uma unidade. Essa unidade a qual Descartes se refere é a idêntica a magnitude que aparece no Livro V dos Elementos de Euclides, definida como: “Uma magnitude é uma parte de uma magnitude, a menor da maior, quando meça exatamente a maior.” (EUCLIDES, 2009, p.205). Assim, uma unidade não é igual ao número um e sim a uma quantidade mínima qualquer que serve de parâmetro para as demais quantidades. Diante disso, pode-se dizer que a beleza do teorema está no fato da lente sempre ter o foco igual a uma unidade. Na verdade, percebe-se que a beleza do teorema de Descartes não consistiu apenas nesse resultado, mas também no método descrito por Descartes até esse resultado. Por esses motivos, não só os conceitos matemáticos devem ser transmitidos às futuras gerações. Esses conceitos devem carregar em si, igualmente, sua beleza.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. Dicionário de Filosofia. São Paulo: Martins Fontes, 2003.

BENEDETTI, L. A. A Beleza da Matemática I. Reflexões Sobre o Curso de Matemática. FAMAT em Revista. Revista Científica Eletrônica da Faculdade de Matemática – FAMAT. UFU. Número 09 - Outubro de 2007. Disponível em <www.famat.ufu.br>. Último Acesso: 14 de maio de 2017.

DESCARTES, R. A Geometria. Tradução, Introdução e Comentários de Raquel Anna Sapunaru. São Paulo: Editora da Física, 2015.

EVES, H. Introdução à história da matemática. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.

GHYS, E. A beleza da matemática. Universidade de Lyon. <http://www.ens-lyon.fr/>. Disponível em <http://perso.ens-lyon.fr/ghys/articles/belezapalestra.pdf>. Último Acesso: 14 de maio de 2017.

HARDY, G. H. Em defesa de um matemático. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

HOFSTADTER, D. R. Godel, Escher and Bach: An eternal golden braid. New York: Basic Books, 1999.

IMAGUIRE, G. O Platonismo de Russell na metafísica e na Matemática. Kriterion: Revista de Filosofia, v. 46, n. 111, p. 9-28, 2005.

PLATÃO. Hipias Maior. Tradução de Carlos Alberto Nunes. Belém: Editora Universidade Federal do Pará, 1980.

TAO, T. What is good mathematics? Bulletin of the American Mathematical Society, v. 44, n. 4, p. 623-634, 2007.

VALE, L. F. A Estética e a Questão do Belo nas Inquietações Humanas. Revista Espaço Acadêmico, n. 46-março de 2005, mensal, ano IV. Disponível em: <http://www.espacoacademico.com.br/046/46cvale.htm>. Último Acesso: 18 de agosto de 2017.