EQUAÇÕES DIOFANTINAS E SUAS APLICAÇÕES

DIOPHANTINE EQUATIONS AND THEIR APPLICATIONS

Dione Conceição de Almeida[1]

Ivone Cristina Barros Pedroza[2]

Resumo: Este trabalho abordou as equações diofantinas como método de solução utilizando pesquisadores matemáticos que exploram a temática utilizando situações-problemas que podem ser encontradas no cotidiano. Dessa forma, evidencia-se a relevância da matemática e enfatiza-se que a imaginação e a abstração são recursos indispensáveis para compreendê-la. Por fim aponta-se a necessidade dê-se estudar a metodologia utilizada na resolução de problemas pelo professor em sala, pois o método contribui no processo de aquisição do conhecimento.

Palavras-chave: Abstração. Equações diofantinas. Conceitos.

Abstract: This work addressed Diophantine equations as a solution method using mathematical researchers who explore the theme using problem situations that can be found in everyday life. In this way, the relevance of mathematics is highlighted and it is emphasized that imagination and abstraction are indispensable resources for understanding it. Finally, the need to study the methodology used in solving problems by the teacher in the classroom is highlighted, as the method contributes to the process of acquiring knowledge.

Keywords: Abstraction. Diophantine equations. Concepts.

1 Discente do curso de licenciatura em matemática – Universidade do Estado da Bahia

2 Docente do curso de licenciatura em matemática – Universidade do Estado da Bahia

INTRODUÇÃO

A resolução de problemas em sistemas de equações nem sempre são simples e inequívocos, no entanto, encontrar solução para uma equação polinomial que envolve duas ou mais incógnitas é um verdadeiro desafio, por ser necessário perceber se apresenta ou não soluções e se o sistema solução se restringe a solução finita ou infinitas.

No entanto, as equações diofantinas lineares é um campo de conhecimento matemático desafiador, pois para encontrar a sua solução é necessário mobilizar diversos campos do conhecimento matemático como, números inteiros, divisibilidade, números primos, máximo divisor comum e algoritmo de Euclides.

A referente pesquisa surgiu durante as aulas de Estrutura Algébrica I, com o seguinte questionamento: Quais estratégias ou métodos permitem identificar que a equação com duas, três ou incógnitas possui solução e tais estratégias podem resolver problemas reais?

A busca por estratégias e métodos para identificar soluções em equações com múltiplas incógnitas revela-se como um campo de estudo indispensável. A complexidade desses desafios matemáticos se intensifica quando nos deparamos com as equações diofantinas lineares.

Ao explorar tal campo do conhecimento matemático, depara-se com a necessidade de integrar diversos domínios do conhecimento matemático. Assim, a tarefa de encontrar soluções para esse tipo específico de equação torna-se um desafio que transcende aos limites convencionais da resolução de sistemas de equações, exigindo uma abordagem mais abrangente e interdisciplinar.

OBJETIVOS

O presente trabalho visa verificar a aplicação de equações diofantinas na resolução de problema. De forma mais específica, para que esse objetivo fosse alcançado, cinco objetivos foram constituídos para conduzir a conclusão dessa investigação:

- Investigar o período histórico em que a matemática se encontrava e como desenvolvia como ciência;
- Analisar a importância das demonstrações e seus conectivos lógicos;
- Definir alguns conceitos preliminares, para o entendimento de equações diofantinas;
- Generalizar a solução de uma equação diofantina;
- Aplicar equações diofantinas através da resolução de problemas.

TRILHANDO CAMINHOS MATEMÁTICOS: CONTEXTO HISTÓRICO

A matemática como ciência foi de grande auxílio para desenvolvimento, expansão e compreensão da sociedade, pois desde seu surgimento utiliza-se de sua linguagem e estrutura para compreender o mundo com a lógica. De acordo com Berlinghoff e Gouvêa (2010), não se sabe quando a matemática surgiu, mas percebe-se que diversas civilizações antigas que desenvolveram a escrita em algum período do tempo formularam ideias básicas de contagem e operações aritméticas.

Portanto, toda civilização dotada de alguma compreensão da escrita utilizava a matemática para desvendar a sua realidade, contudo a utilização dessa matemática ocorria de maneira prática não exigindo do indivíduo abstração e sim aplicação imediata em operações aritméticas simples como adição e subtração.

No entanto, a medida em que a sociedade evoluía, a necessidade de novos conhecimentos e métodos de contagem eram necessários; para suprir tais necessidades foram desenvolvidas as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, por exemplo.

A matemática, frequentemente considerada uma disciplina abstrata e complexa, é fundamental para compreender o mundo ao nosso redor. Através dela, exploramos a estrutura subjacente da realidade e deciframos os padrões que regem fenômenos naturais e artificiais. No entanto, sua verdadeira magia reside na capacidade de transcender sua própria lógica para influenciar a criação artística e a expressão humana.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (2017), afirma que o currículo educacional deve, garantir o protagonismo dos estudantes em sua aprendizagem e o desenvolvimento de suas capacidades de abstração, reflexão, interpretação, proposição e ação, que são essenciais à sua autonomia pessoal, profissional, intelectual e política. Ou seja, o documento regulamentador educacional traz a importância de desenvolver a abstração, por exemplo, para o estudante desenvolver-se na sociedade.

A abstração, permite a concepção de ideias que vão além dos limites tangíveis do universo físico, por sua vez, alimenta a criatividade, inspirando os seres humanos a buscarem soluções cada vez mais eficazes para a solução de problemas da nossa sociedade. Partindo desse pressuposto, o Documento Curricular Referencial do Estado da Bahia (DCRB) (2022), diz que:

> É necessário construir uma educação que dialogue com todos e tudo que faz parte da realidade em pleno sec. XXI. Para isso, é necessário construir um currículo para a Educação Básica com base nos documentos de caráter normativos que visam à formação humana integral, definindo aprendizagens essenciais que devem ser atingidas ao longo da Educação Básica por todos os/as estudantes. (DCRB, 2022, p. 180).

A DCRB (2022), nos relata a importância de preparar o cidadão para conviver em sociedade cada vez mais digital, tendo foco a diversidade, incerteza, inovação, descentralização, entusiasmo e desenvolvimento da criatividade, sendo esses em sua maioria, qualidades do ser imagético, por desempenharem um papel fundamental em nossa percepção, cognição e criatividade.

Portanto, compreender a história da matemática é um passo crucial para desenvolver-se enquanto ciência, pois se percebe que seu conhecimento é acumulativo e a necessidade do desenvolvimento do pensamento abstrato é essencial para que o ser humano e a sociedade se desenvolvam. Desse modo há uma interrelação indissociável e a medida em que a sociedade evolui o ser humano também evolui.

Percebe-se que a história e a matemática diante de novos contextos e situações se desenvolvem criando interdependência, exigindo que o ser humano desenvolva suas capacidades cognitivas imaginativas e progrida em seu pensamento técnico-científico.

EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES

No contexto histórico da matemática, observa-se que Diofante de Alexandria foi um dos primeiros matemáticos a abordar problemas relacionados as equações diofantinas, buscando soluções inteiras. Contudo, sua ênfase restringia-se a encontrar um par específico de soluções, representado por , sem uma preocupação explícita em generalizar ou determinar todas as soluções possíveis.

Durante o período antigo, diversos estudiosos, inspirados por questões práticas e aplicadas, dedicaram-se à resolução de equações diofantinas. Suas investigações buscavam compreender padrões e regularidades nas soluções inteiras, contribuindo para o desenvolvimento da teoria dos números em suas formas iniciais.

Na Idade Média, uma variedade de abordagens analíticas começou a ser empregada na resolução de equações diofantinas. Matemáticos desse período exploraram métodos mais sistemáticos, buscando relações algébricas e padrões em soluções inteiras. Essas abordagens, embora não tenham se preocupado necessariamente com a generalização, contribuíram para a expansão do conhecimento nesse campo.

À medida que a matemática evoluía, a consolidação da teoria dos números trouxe avanços significativos no entendimento das equações diofantinas. Novos teoremas foram formulados, fornecendo condições específicas para a existência de soluções inteiras e explorando relações mais profundas entre os coeficientes das equações.

Nas épocas mais recentes, as equações diofantinas continuaram a desempenhar um papel crucial, especialmente em aplicações tecnológicas. Algoritmos criptográficos modernos, como o Rivest Shamir Adleman (RSA), são fundamentados em propriedades dessas equações para garantir a segurança na transmissão de dados. A interseção entre a teoria dos números e as demandas práticas da era contemporânea destaca a importância contínua da pesquisa em equações diofantinas.

Equações Diofantinas com duas variáveis

Definição 1: Uma equação diofantina linear a duas variáveis x e y é uma equação do tipo $ax + by = c$, com $a, b, c \in Z$. Dizemos que a equação tem solução em inteiros quando x_0 e y_0 tais que $ax_0 + by_0 = c$ e o par ordenado (x_0, y_0) é então chamado solução da equação.

Colorário 1: Se a e b são inteiros primos entre si então a equação $ax + by = c$ tem solução, qualquer que seja o inteiro c.

Demonstração: Considere o conjunto de todos os inteiros da forma $ax + by$, onde x e y são inteiros quaisquer. Vamos chamar esse conjunto de $S = \{ax + by \mid x, y \in Z\}$.

Dado que a e b são primos entre si, o algoritmo de Euclides garante que existem inteiros m e n tais que $am + bn = 1$. Multiplica-se ambos os lados da equação $am + bn = 1$ por c: $a(mc) + b(nc) = c$. Isso implica que $a(mc)$ e $b(nc)$ e estão em S, já que m e n são inteiros.

Portanto, encontramos uma solução particular (x_0, y_0) para a equação $ax + by = c$, onde $x_0 = mc$ e $y_0 = nc$. Além disso, qualquer outra solução da equação pode ser expressa como $x = x_0 + bt$ e $y = y_0 - at$, onde t é um inteiro. Assim, mostramos que, dado que a e b são inteiros primos entre si, a equação $ax + by = c$ tem solução para quaisquer inteiros c.

Colorário 2: A equação $ax + by = 1$ tem solução se, somente se, a e b são inteiros primos entre si.

Demonstração:

Parte 1 $\longrightarrow$ Suponha que a equação $ax + by = 1$ tem uma solução, ou seja, existem inteiros x_0 e y_0 tais que $ax_0 + by_0 = 1$. Vamos assumir por contradição que a e b não são primos entre si. Isso implica que o mdc (a, b) não é igual a 1. Como $ax_0 + by_0 = 1$, o mdc (a, b) divide 1. No entanto, isso é uma contradição, pois o único divisor de 1 são 1 e, portanto, a e b devem ser primos entre si. Portanto, se a equação ax + by = 1 tem uma solução, então a e b são inteiros primos entre si.

Parte 2 → Agora, suponha que a e b são inteiros primos entre si, ou seja, mdc (a, b) = 1. Vamos considerar o conjunto S = {ax + by | x, y $\in$Z}. Queremos mostrar que 1 pertence a S. Pelo algoritmo de Euclides, sabemos que existe x_0 e y_0 tais que $ax_0 + by_0 = 1$ (já que a e b são primos entre si). Isso implica que 1 pertence a S, pois $1 = ax_0 + by_0$ e x_0 e y_0 são inteiros. Portanto, se a e b são inteiros primos entre si, então a equação $ax_0 + by_0 = 1$ tem uma solução. Combinando as duas partes da demonstração, podemos concluir que a equação $ax_0 + by_0 = 1$ tem solução se, e somente se, a e b são inteiros primos entre si.

Proposição 1: Se a equação diofantina linear ax + by = c possui solução (x_0, y_0), então a equação possui infinitas soluções e o conjunto de todas as soluções é $S = \{\left(x_0 + \frac{b}{d}t, y_0 - \frac{a}{d}t\right) / t \in \mathbb{Z}\}$, onde d = mdc (a,b)

Demonstração: Para demonstrar que $S = \{(x_0 - \frac{bt}{d}, y_0 + \frac{at}{d}) / t \in \mathbb{Z}\}$ é verdadeira, precisamos mostrar que qualquer par de inteiros (x,y) que satisfaz a equação ax + by = c pode ser escrito na forma $(x_0 + \frac{bt}{d}, y_0 - \frac{at}{d})$ para algum t inteiro. Seja (x, y) um par de inteiros que satisfaz ax + by = c. Pelo Teorema de Bezout, sabemos que existe uma solução inteira (x_0, y_0) para a equação ax + by = mdc (a,b). Seja d = mdc (a,b). Então podemos escrever:

$$\frac{a}{d} x_0 + \frac{b}{d} y_0 = \frac{c}{d}$$

Multiplicando ambos os lados por t $\in$ Z, obtemos:

$$\frac{a}{d} x_0 t + \frac{b}{d} y_0 t = \frac{c}{d} t$$

Isolando x e y em termos de t, temos:

$$x = x_0 + \frac{bt}{d}; \; y = y_0 - \frac{at}{d}$$

Portanto, (x, y) pode ser escrito na forma $(x_0 + \frac{bt}{d}, y_0 - \frac{at}{d})$ para algum t inteiro. Isso mostra que S contém todos os pares de inteiros (x, y) que satisfazem a equação ax + by = c.

Por outro lado, suponha que (x, y) é um elemento de S. Então existem inteiros t ϵ Z, x_0 e y_0 tais que:

$$x = x_0 + \frac{bt}{d};\ y = y_0 - \frac{at}{d} \qquad S = \{(x_0 + \frac{b}{d}t, y_0 - \frac{a}{d}t) \,/\, t \in \mathbb{Z}\}$$

Substituindo essas expressões na equação ax + by = c, obtemos:

$$a(x_0 + \frac{bt}{d}) + b(y_0 - \frac{at}{d}) = c$$

Simplificando, obtemos:

Como d é um divisor comum de a e b, o termo entre parênteses é inteiro. Portanto, concluímos que (x, y) satisfaz a equação ax + by = c. Em resumo, mostramos que S contém todos os pares de inteiros que satisfazem a equação ax + by = c, e que qualquer elemento de satisfaz essa equação.

Portanto, $S = \{(x_0 + \frac{b}{d}t, y_0 - \frac{a}{d}t) \,/\, t \in \mathbb{Z}\}$ é verdadeira.

Equações diofantinas lineares com três variáveis

Uma equação diofantina de três variáveis quando escrita da seguinte forma: ax + by +cz = d, com a, b e c ϵ Z e com d ≠ 0. Suas soluções são os valores atribuídos a x, y e z ϵ Z.

Teorema 1: A equação diofantina com três incógnitas ax + by +cz = d, sendo e = mdc (a,b), a equação admite solução somente de e | d.

Demonstração: Se ax + by +cz = d possui solução x_0, y_0 e z_0. Sabe-se que o mdc (a,b) = e e que, portanto, e | a, e | b e e | c, logo e | ax_0, e | by_0 e e | cz_0, para quaisquer x_0, y_0 e z_0 ϵ Z e, sabe-se também, que e | ax_0 + e | by_0 + e | cz_0, logo temos que e | d.

→ Se e | d, a equação diofantina possui soluções. Seja e_1 = mdc (a,b), tem-se que $\ni k_1$ e $k_2 \in$ Z tais que $e_1 = ak_1 + bk_2$. Sabe-se que o mdc (a, b, c) = mdc (mdc (a, b), c) = mdc (e_1, c) = e, logo k_3 e k_4 Z, tal que $e = e_1k_3 + ck_4$, substituindo e_1 tem-se $e = (ak_1 + bk_2)\, k_3 + ck_4 = ak_1k_3 + bk_2\, k_3 + ck_4$.

Por hipótese, tem-se que e | d logo tem-se que d = eq. Multiplicando ambos os lados da igualdade por q tem $eq = aqk_1k_3 + bqk_2\, k_3 + cqk_4$, fazendo $qk_1k_3 = x_0$, $qk_2\, k_3 = y_0$, $qk_4 = z_0$ e sendo assim $eq = ax_0 + by_0 + cz_0$ e como d = eq fica demonstrado que e | d, logo há resultado para a equação diofantina.

Teorema 2: dada a equação diofantina ax + by +cz = d, que admita solução $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3\}$ Considere e = mdc (a,b) . Todo número da forma $a = x + \frac{b}{d}t_2$, $b = y - \frac{a}{d}t_2$, c = z - t_1 com t_1 e $t_2 \in$ Z também será solução.

Demonstração: Dada a equação diofantina ax + by +cz = d, com S = (a, b, c) ϵ Z, onde e = mdc (a, b), tem-se que: $a = x + \frac{b}{e}t_2$ e $b = y - \frac{a}{e}t_2$. Substituindo os valores de a e b na equação original, obtém-se:

$$a\left(x + \frac{b}{e}t_2\right) + b\left(y - \frac{a}{e}t_2\right) + cz = d$$

Simplificando a expressão, tem-se: $ax + abt_2 + by - abt_2 + cz = d$, que pode ser reescrito como: ax + by + cz = d.

Isso mostra que (x, y, z) é de fato uma solução da equação diofantina. Da mesma forma, o mesmo raciocínio pode ser aplicado para b e c, provando que (x, y_0, z) e (x, y, z_0) também são soluções da equação diofantina.

Portanto, conclui-se que qualquer número escrito sob a forma de $a = x + \frac{b}{e}t_2, b = y - \frac{a}{e}t_2$ e $b = y - \frac{a}{e}t_2$ onde t_1 e t_2 ϵ Z, são soluções da equação diofantina dada.

Equações diofantinas lineares com n variáveis

Uma equação diofantinas de incógnitas é uma equação polinomial onde as soluções procuradas se restringem ao universo dos inteiros. A generalização é dada por:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \text{com } n \in \mathbb{N} \text{ e } n > 2$$

sendo n o enésimo termo da equação polinomial.

Onde a_1, a_2, a_2 e b são constantes e x_1, x_2, x_n são as incógnitas, que devem ser inteiros.

Teorema 3: Dada a equação diofantina $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, $n \in N$ e $n > 2$, seja e = mdc ($a_1, a_2, \ldots, a_n$), a equação diofantina admite soluções se, e somente se, e | b.

Demonstração: Se a equação diofantina admite soluções, então existe inteiros $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisfazem a equação. Isso implica que d é uma combinação linear dos inteiros $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Por definição de mdc, *e* é um divisor comum de $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Portanto *e* também divide d devido a propriedade de que um divisor comum divide qualquer combinação linear dos números.

Por outro lado, se *e* divide d, então podemos escrever d = ek para algum inteiro k. Pelo teorema de Bézout, uma vez que o mdc de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, existe uma solução para a equação $a_1x_1 + a_2 x_2 + ... + a_nx_n = e$ com $x_1, x_2, \ldots, x_n$ inteiros. Multiplicando todos os termos por k, obtemos solução para a equação $a_1x_1 k + a_2 x_2k + ... + a_nx_nk = ek = d$. Portanto a equação diofantina admite soluções se, e somente se, o mdc ($a_1, a_2, \ldots, a_n$) dividir b.

Teorema 4: Dado $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, com n > 2, que admita solução particular $S = \{(x, y, \ldots, z_n) \in \mathbb{Z}^n\}$.. Considere e = mdc ($a_1, a_2$).

Toda solução da equação é da forma $X_1 = x_1 + \frac{a_2}{e}t_{n-1}, X_2 = x_2 - \frac{a_2}{e}t_{n-1}, \ldots, X_n = x_n - t_1$ com $t_1 \in Z$.

Demonstração: Aplicando o algoritmo de Euclides para encontrar o máximo divisor comum de a_1 e a_2 obtemos o valor de *e*. E assim consegue-se expressar $a_1 = e$p e $a_2 = e$p onde p e q são inteiros.

Pode-se resolver a equação linear dada e encontrar uma solução particular $S = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)\} \in \mathbb{Z}^n$

A solução geral da equação é dada por:

$$X_1 = x_1 + \frac{a_2}{e} t_{n-1}$$

$$X_2 = x_2 - \frac{a_2}{e} t_{n-1}$$

$$\dots$$

$$X_i = x_i - t_{n-i+1}$$

Onde, t_1, t_2, ..., t_{n-1}, são números inteiros. Essa forma geral de solução garante que todas as soluções da equação linear dada podem ser expressas dessa maneira.

APLICAÇÕES

O estudo das aplicações em contextos matemáticos tem como propósito enriquecer a educação matemática, proporcionando uma compreensão mais profunda e prática dos conceitos, promovendo a motivação e preparando os estudantes para os desafios reais. A inclusão do tópico de aplicações nos estudos matemáticos objetiva diversos aspectos relevantes, tais como a contextualização, a relevância dos conceitos, o estímulo à criatividade, a integração de disciplinas e o desenvolvimento de habilidades na resolução de problemas.

Esse conjunto de fatores contribui para uma compreensão mais aprofundada e, consequentemente, uma melhor assimilação do conteúdo abordado. As aplicações práticas dos conceitos matemáticos são fundamentais para destacar que a matemática teórica serve como base para a resolução de problemas reais, uma competência essencial em diversas áreas profissionais. Esse enfoque estimula o pensamento abrangente e a aplicação criativa de conceitos matemáticos, preparando os estudantes para enfrentar desafios complexos em diferentes contextos.

Dessa forma, a abordagem de aplicações nos estudos matemáticos não apenas fortalece a compreensão teórica, mas também inspira uma visão prática e aplicada da matemática, alinhada com as demandas do ambiente profissional e cotidiano.

Exemplo 1: Um lavrador gastou R$ 10 000 na compra de 100 animais de três espécies diferentes. Cada vaca custa R$ 1 000, cada porco R$ 300 e cada ovelha R$ 50. Supondo que o lavrador comprou pelo menos um animal de cada espécie, quantos animais de cada espécie comprou ele? (adaptado de GARDNER (1992)).

Solução: faz-se x a quantidade de vaca, y quantidade de porcos e z a quantidade de ovelhas, observando o problema temos duas equações uma em que representa a quantidade total de animais e outra em que determina a quantidade total gasta na aquisição de cada espécie.

(I) $x + y + z = 100$; representa a quantidade total de animais;

(II) $1.000x + 300\, y + 50\, z = 10.000$; representa a quantidade total gasta.

Dividindo a equação (II) por 50, tem-se $20x + 6y + z = 200$ equação equivalente a original, tendo a equação (II)' e multiplicando a (I) por (-1), $-x -y -z = -100$, portanto a equação (I)'. Agora somando (II)' + (I)''. Tem-se:

$$20x + 6y + z = 200$$

$$+$$

$$-x -y -z = -100$$

Dessa adição de termos semelhantes, tem-se a seguinte equação resultante $19x + 5y = 100$, denominada de equação resultante; portanto uma equação diofantina de duas incógnitas deve-se encontrar o mdc (19, 5) e vê se mdc (19, 5) | 100. Utilizando o algoritmo de Euclides:

$$19 = 5 \times 3 + 4 \rightarrow 4 = 19 - 5 \times 3$$

$$5 = 4 \times 1 + 1 \rightarrow 1 = 5 - 4 \times 1$$

$$4 = 1 \times 4 + 0$$

De acordo com o algoritmo de Euclides quando o resto é zero, chega-se ao final das divisões e o máximo divisor comum entre os dois números é o resto anterior a zero, portanto o mdc (19, 5) = mdc (5, 4) = 1, como 1| 100, logo há solução para a equação, basta encontrar solução particular, ou seja, (x_0, y_0). Fazendo o inverso do algoritmo:

$$1 = 5 - 4 \times 1$$

$$1 = 5 - (19 - 5 \times 3) \times 1$$

$$1 = 5 \times 4 - 19 \times 1$$

Reorganizando, para que fique similar a equação (er), tem-se 1 = 19 x (-1) + 5 x 4, multiplicando-a por 100 para que assim, obtêm-se solução particular.

$$100 = 19 \text{ x } (-100) + 5 \text{ x } 400$$

Logo, o sistema solução será $s = \{(-100 + 5t, 400 - 19t), t \in \mathbb{Z}\}$

No entanto a solução termina, pois conseguiu-se realizar a generalização para o sistema, contudo falta resolver a restrição imposta pelo problema na qual diz "Supondo que o lavrador comprou pelo menos um animal de cada espécie", sendo assim x > 0 e y > 0.

$$-100 + 5t > 0 \qquad 400 - 19t > 0$$

$$5t > 100 \qquad -19t > -400 \ \times (-1)$$

$$t > \frac{100}{5} \qquad 19t < 400$$

$$t > 20 \qquad t < \frac{400}{19}$$

Portanto, $20 < t < \frac{400}{19}$, como a equação diofantina se restringe ao universo dos inteiros, logo t = 21, substituindo resultado de , no sistema solução tem-se:

$$x = -100 + 5t \qquad y = 400 - 19t$$

$$x = -100 + 5(21) \qquad y = 400 - 19(21)$$

$$x = -100 + 105 \qquad y = 400 - 399$$

$$x = 5 \qquad y = 1$$

De acordo como o que foi encontrado em que a quantidade de vacas são 5 unidades e 1 porco, fica fácil encontrar a quantidade de ovelhas utilizando a equação (I).

$$x + y + z = 100$$

$$5 + 1 + z = 100$$

$$z = 100 - 6$$

$$z = 94$$

Logo, a quantidade de ovelhas será 94.

Exemplo 2: Determine o menor inteiro positivo que dividido por 8 e 15 deixa restos 6 e 13, respectivamente (DOMINGUES E IEZZI, 2018).

Solução: Como não se sabe qual o número dividido por 8 e 15 deixa restos 6 e 13, este será representado por x e utilizando o algoritmo da divisão em que um número qualquer pode ser escrito pelo produto do dividendo pelo quociente acrescido do resto, ou seja, x = d x q + r , onde d é o dividendo, q o quociente e r o resto, sendo assim, o número pode ser escrito como:

(I) x = 8p + 6

(II) x = 15q + 13

Sendo ambas as equações se tratar do mesmo número x, então (I) = (II), 8p + 6 = 15q + 13 resolvendo: 8p - 15q = 13 - 6

(III) 8p - 15q = 7

Como a equação (III), refere-se há equação diofantina, precisa-se encontrar o mdc (15, 8) de modo que o resultado seja divisor de 7 e assim encontrar a solução para o sistema, utilizando o algoritmo de Euclides.

$$15 = 8 \times 1 + 7 \rightarrow 7 = 15 - 8 \times 1$$
$$8 = 7 \times 1 + 1 \rightarrow 1 = 8 - 7 \times 1$$
$$7 = 1 \times 7 + 0$$

Logo o mdc (15, 8) = mdc (8, 7) = 1 e como 1 | 7 há solução para a equação e para encontrar tal solução precisa-se encontrar a solução particular, então refazendo o algoritmo de Euclides, tem-se

$$1 = 8 - 7 \times 1$$
$$1 = 8 - (15 - 8 \times 1) \times 1$$
$$1 = 8 \times 2 - 15 \times 1$$

Multiplicando $1 = 8 \times 2 - 15 \times 1$ por 7 para que obter uma equação similar a (III), $7 = 8 \times 14 - 15 \times 7$, a partir daí encontra-se solução particular para o sistema dado.

$$s = \{(14 - 15t, 7 - 8t), t \in \mathbb{Z}\}$$

Para encontrar o valor de t é necessário utilizar as inequações, sendo assim, $14 - 15t \geq 0$ e $7 - 8t \geq 0$.

$$14 - 15t \geq 0 \qquad\qquad 7 - 8t \geq 0$$
$$-15t \geq -14 \times (-1) \qquad\qquad -8t \geq -7 \times (-1)$$
$$15t \leq 14 \qquad\qquad 8t \leq 7$$
$$t \leq \frac{14}{15} \qquad\qquad t \leq \frac{7}{8}$$

Então, $t \leq \frac{7}{8}$ como a equação diofantina só admite inteiros positivos tem-se então os possíveis valores para t = (…, -3, -2, -1, 0), logo deduz-se que para qualquer valor abaixo de zero, incluindo o zero será divisível por 8 e possuir resto 6 ou dividido por 15 e possuir resto 13.

Porém a situação pede que o valor de x seja o menor inteiro possível para que isso se torne possível t deverá ser zero. Utilizando $q = 7 - 8t = 7 - 8 \times 0 = 7$, sendo assim o valor de q = 7, de acordo com a equação (II) em que o valor de x está atrelado a q.

$$x = 15q + 13$$

$$x = 15(7) + 13$$

$$x = 118$$

Logo o menor inteiro positivo que satisfaz a situação é 118

Exemplo 3: Considere o caso de um fazendeiro criador de animais que dispõe de R$ 35.400,00 para a compra de bois e de cavalos. Cada boi custa R$ 660,00 e cada cavalo, R$ 420,00. É possível ao fazendeiro gastar todo o dinheiro de que dispõe no momento na compra desses dois tipos de animais? Qual o número máximo de animais que pode adquirir? Quantos bois e quantos cavalos? (DOMINGUES E IEZZI, 2018).

Solução: Para encontrar a solução para o problema faz-se a quantidade de bois adquiridos no ato da compra pelo fazendo e a quantidade de cavalos, tem-se a seguinte equação de generaliza a situação 600b + 420c = 35.400.

Sabe-se que a solução da equação é determinada se o mdc (660, 420 | 35.400) utilizando o algoritmo das divisões sucessivas:

$$660 = 420 \times 1 + 240 \rightarrow 240 = 660 - 420 \times 1$$
$$420 = 240 \times 1 + 180 \rightarrow 180 = 420 - 240 \times 1$$
$$240 = 180 \times 1 + 60 \rightarrow 60 = 240 - 180 \times 1$$
$$180 = 60 \times 3 + 0$$

Refazendo o algoritmo das divisões sucessivas tem-se:

$$60 = 240 - 180 \times 1$$
$$60 = 240 - (420 - 240 \times 1) \times 1$$
$$60 = 240 \times 2 - 420 \times 1$$
$$60 = (660 - 420 \times 1) \times 2 - 420 \times 1$$
$$60 = 660 \times 2 + 420 \times (-3)$$

Multiplicando 60 = 660 × 2 + 420 × (-3) por 590 e assim encontra-se a solução particular para o problema, 35.400 = 660 × 1180 + 420 × (-1770), então o sistema solução será dado por:

$$s = \{\left(1180 + \frac{420}{60}t, -1170 - \frac{660}{60}t\right), t \in \mathbb{Z}$$
$$s = \{(1180 + 7t, -1170 - 11t), t \in \mathbb{Z}$$

Para encontrar a quantidade de animais precisa-se utilizar as inequações e assim descobrir os possíveis valores correspondentes de t:

$$1180 + 7t \geq 0$$
$$7t \geq -1180$$
$$t \geq -\frac{1180}{7}$$

$$-1170 - 11t \geq 0$$
$$-11t \geq 1170 \times (-1)$$
$$t \leq -\frac{1170}{11}$$

Portanto, $-\frac{1180}{7} \leq t \leq -\frac{1170}{11}$, como o resultado só admite valores inteiros então, para que seja possível que o fazendeiro gaste todo o dinheiro na compra de bois e cavalos é necessário que t = -168, -167, -166, -165, -164, -163, -162, -161, -160.

Como deseja-se encontrar o valor máximo de animais adquiridos, tem-se o seguinte quadro.

Quadro 1: Quantidade de animais

t	bois	cavalos	total de animais
-168	4	78	82
-167	11	67	78
-166	18	56	74
-165	25	45	70
-164	32	34	66
-163	39	23	62
-162	46	12	58
-161	53	1	54

Fonte: elaborado pelo autor.

Percebe-se então que a quantidade máxima de animais é 82, sendo, portanto, 4 bois e 78 cavalos.

CONCLUSÕES

A matemática é uma disciplina vasta e abrange diversos ramos e abordagens. Duas dessas abordagens são a matemática aplicada e a matemática abstrata. Embora compartilhem uma base comum, essas abordagens diferem em seus objetivos e métodos.

A partir das análises construídas ao longo deste trabalho constata-se a importância que a demonstração tem para a averiguação do pensamento matemático. Portanto, a pesquisa de campo em que o pesquisador precisa analisar e tirar conclusões para o desenvolvimento técnico-científico os matemáticos utilizam as demonstrações para a conclusão de seus pensamentos e assim se desenvolver cientificamente.

Tem em vista entender as propriedades, as relações entre essas estruturas e estabelecer teoremas gerais que são aplicáveis a diversos contextos matemáticos. Embora a matemática abstrata possa eventualmente encontrar aplicações práticas, seu principal objetivo é o desenvolvimento do conhecimento matemático puro e a construção de uma base sólida para outras áreas da matemática e demais ciências.

Em resumo, a matemática aplicada concentra-se em resolver problemas, reais utilizando métodos e modelos matemáticos para obter soluções práticas, enquanto a matemática abstrata concentra-se no estudo das estruturas matemáticas puras, independentemente de sua aplicação imediata. Ambas as abordagens desempenham papéis importantes no desenvolvimento da matemática e têm suas próprias aplicações e relevância em diferentes contextos.

A utilização de demonstrações e o ensino da história da matemática desempenham um papel importante no ensino da matemática abstrata. Essas abordagens podem fornecer uma compreensão mais profunda dos conceitos abstratos, tornar o ensino mais envolvente e contextualizar a matemática num contexto histórico e cultural.

As demonstrações são fundamentais para a compreensão dos conceitos matemáticos abstratos. Auxiliam os alunos a ver como os teoremas são derivados a partir de axiomas, definições e outros resultados prévios. As demonstrações fornecem uma estrutura lógica para os conceitos e permitem que os alunos compreendam por que esses conceitos são verdadeiros. Ao acompanhar as demonstrações, os alunos podem desenvolver um entendimento mais profundo e intuitivo dos conceitos abstratos.

As demonstrações exigem um pensamento crítico e analítico. Ao trabalhar com demonstrações, os alunos são desafiados a analisar cada etapa logicamente, identificar as suposições e justificar cada passo. Esse processo ajuda a desenvolver habilidades de raciocínio abstrato, lógica e pensamento crítico, essenciais para o estudo da matemática abstrata.

A história da matemática traz contexto e relevância para os conceitos abstratos. Ao aprender sobre os matemáticos do passado e como eles desenvolveram os conceitos que estão sendo estudados, os alunos podem se sentir mais motivados e engajados com o assunto. A história da matemática mostra que não é apenas um conjunto de regras abstratas, mas sim uma disciplina viva, em constante evolução, com pessoas reais realizando contribuições ao longo dos séculos. A história da matemática também ajuda a estabelecer conexões.

As conexões obtidas permitem compreender que o processo de aprendizagem não é linear e sim gradual, que existe uma correlação entre os conteúdos, por exemplo, ao estudar equações diofantinas precisa-se compreender os números inteiros, divisibilidade, máximo divisor comum e números primos.

No entanto, somente a compreensão da não linearidade do processo de ensino-aprendizagem não garante que o educando ou o educador conseguirá atingir os objetos de conhecimento, é necessário que se faça uma abordagem metodológica conforme o nível de conhecimento do estudante, utilizando das diversas ferramentas metodológicas disponíveis.

De modo geral, apresenta-se a generalização das equações diofantinas e seus conteúdos correspondentes, assim como as possíveis aplicações. Buscou-se por meios dos exemplos mostrar as aplicações e os métodos de resolução para assim se torne fácil a compreensão. Por fim a pesquisa a ponta a necessidade de um aprofundamento correlacionada a abordagem metodológica em sala de aula.

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

BAHIA. Documento Curricular Referencial da Bahia. Rio de Janeiro: FGV, v. 2, 2022.

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. 2ª. ed. São Paulo: Blucher, v. I, 2010.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular, Brasilia, 2017. Disponivel em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 15 agosto 2023.

DOMINGUES, H.; IEZZI, G. Álgebra moderna. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2018.

GARDNER, M. Rodas, vida e outras diversões matemáticas. [S.l.]: Gradiva, 1992.

SILVA, J. C.; RIBEIRO G. Estruturas algébricas para licenciatura: Elementos de Aritmética Superior. São Paulo: Blucher, v. 2, 2018.